Théorie des Groupes et Géométrie

Feuille n°1

Actions de groupes

Si p est un nombre premier, on appelle *p-groupe* un groupe fini non trivial d'ordre une puissance p.

Exercice 1 (Centre d'un p-groupe)

Montrer que le centre d'un p-groupe n'est pas réduit à l'élément neutre.
Regardez la partition en orbites pour l'action de G par conjugaison sur lui-même.

Exercice 2 (Groupes d'ordre p^2 et p^3)

1. Montrer que si le quotient d'un groupe par son centre est cyclique alors le groupe est abélien, donc égal à son centre.
2. Montrer qu'un groupe d'ordre p^2 est abélien. En déduire la liste des groupes d'ordre p^2.
3. Soit G un groupe non abélien d'ordre p^3 et Z son centre. Montrez que :

$$\text{(i) } Z \text{ est d'ordre } p, \qquad \text{(ii) } G/Z \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2, \qquad \text{(iii) } D(G) = Z.$$

Exercice 3 (Théorème de Cauchy)

Démontrez que tout groupe fini d'ordre divisible par un nombre premier p possède un élément d'ordre p. *On pourra faire agir par permutation circulaire le groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur l'ensemble des p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ de G tels que $x_1 \cdots x_p = 1$.*

Exercice 4 (Application des formules de comptage)

On fixe une action d'un groupe G sur un ensemble fini E.

1. On suppose que l'ordre de G est 15 et que le cardinal de E est 17
   i. Si E n'a pas de point fixé par tous les éléments du groupe G, déterminer le nombre d'orbites et le cardinal de chacune d'elles.
   ii. G peut-il avoir un unique point fixe ?
   iii. Donner des exemples illustrant les cas ci-dessus.
2. Montrer que toute action d'un groupe d'ordre 143 sur un ensemble de cardinal 25 possède un point fixe.

Exercice 5 (Action par translation sur G/H)

Soit G un groupe et H un sous-groupe. On considère l'action de G sur G/H par translation à gauche.

1. Montrer que cette action est transitive.
2. Identifier le stabilisateur de la classe xH.
3. En déduire le noyau de cette action.
4. *Application 1 :* Supposons G fini. Soit p le plus petit facteur premier de l'ordre de G. Soit H un sous-groupe de G d'indice p.
   - Montrer que les orbites de l'action de H sont réduites à des points.
   - En déduire que H est distingué.
5. *Application 2 :* Montrer qu'un groupe infini qui possède un sous-groupe d'indice fini n'est pas simple.

Exercice 6 (Un point fixe commun)

Soit G un groupe fini agisssant sur un ensemble fini X. On suppose que chaque $g \in G \setminus \{1\}$ a un unique point fixe. Nous allons montrer que G fixe un point.

1. On note $Y = \{x \in X : \mathrm{Stab}(x) \neq \{1\}\}$. Montrer que Y est stable par G. On choisit un élément dans chacune des n orbites dans Y : $\{y_1, \dots y_n\}$ et on note $m_i = |\mathrm{Stab}(y_i)|$
2. En dénombrant $E^\times = \{(g, x) \in (G \setminus \{1\}) \times X : g \cdot x = x\}$, montrer que $1 - \frac{1}{\#G} = \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{1}{m_i}$
3. En déduire que $n = 1$ et conclure

Exercice 7 (Pas de point fixe)

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X.

1. En dénombrant $E = \{(g, x) \in G \times X : g \cdot x = x\}$, donner le nombre moyen de points fixes d'un élément de G
2. Quelle est le nombre moyen de points fixes d'une permutation aléatoire ?
3. Si l'action de G est transitive (et que $\#X > 1$), montrer qu'il existe $g \in G$ sans point fixe.

Exercice 8 (Sur la transitivité multiple)

Soit $k \geq 1$ entier. On dit que l'action d'un groupe G sur un ensemble X de cardinal au moins k est *k-transitive* si pour tout $x_1, \dots, x_k \in X$ distincts et tout $y_1, \dots, y_k \in X$ distincts, il existe $g \in G$ tel que $gx_i = y_i$ pour $i = 1, \dots, k$.

1. Montrer qu'une action $k+1$-transitive est k-transitive
2. Montrer qu'une action est k-transitive si et seulement si elle est transitive et que l'action du stabilisateur de tout point $x \in X$ sur $X \setminus \{x\}$ est $(k-1)$-transitive.
3. Montrer qu'une action est k-transitive si et seulement si elle est transitive et que l'action d'un stabilisateur d'un point $x \in X$ sur $X \setminus \{x\}$ est $(k-1)$-transitive.
4. Montrer qu'une action 2-transitive est primitive.
5. Montrer que si G est fini et agit k-transitivement sur X fini alors $\frac{\#X!}{(\#X-k)!}$ divise $\#G$.

Exercice 9

Soit V un espace vectoriel de dimension fini sur $k \neq \mathbb{F}_2$ de dimension au moins 2. Montrez que l'action de $\mathrm{GL}(V)$ sur $V \setminus \{0\}$ est transitive mais n'est pas primitive.

Exercice 10

Soit G un groupe agissant transitivement sur X et N un sous-groupe distingué de G.

1. Vérifier que les orbites de N forment une partition de X.
2. Montrer que cette partition est G-invariante.
3. En déduire que si l'action est primitive et fidèle et N est non trivial alors N agit transitivement sur X.

Résolubilité

Exercice 11 (Étude de $\mathfrak{S}_3$)

1. Donner les structures de cycles possibles dans $\mathfrak{S}_3$, le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_3$ ayant cette structure, et leur signature.
2. Décrire les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$, et ceux qui sont distingués dans $\mathfrak{S}_3$. Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_3$.
3. Montrer que $\mathfrak{S}_3$ est résoluble.

Exercice 12 (Suite dérivée de $\mathfrak{S}_4$)

On note V le sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$ composé des double-transpositions (produits de transpositions à supports disjoints) et 1.

1. Montrer que $D(\mathfrak{S}_4) \subset \mathfrak{A}_4$.
2. Calculer les commutateurs $(1,2)(1,3)(1,2)^{-1}(1,3)^{-1}$ et $(1,2,3)(1,2,4)(1,2,3)^{-1}(1,2,4)^{-1}$.
3. Montrer que $D(\mathfrak{S}_4) = \mathfrak{A}_4$.
4. Montrer que $V \subset D(\mathfrak{A}_4)$.
5. Vérifier que V est distingué dans $\mathfrak{A}_4$ et que le quotient $\mathfrak{A}_4/V$ est un groupe abélien. En déduire que $D(\mathfrak{A}_4) \subset V$.
6. En déduire $D^2(\mathfrak{S}_4)$.
7. Calculer les autres sous-groupes dérivés de $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 13 (Transformations affines de la droite)

Soient k un corps et G l'ensemble des applications $f : k \to k$ de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in k$, $a \neq 0$. Démontrez que G est un groupe résoluble.

Exercice 14 (Groupes finis résolubles)

1. En utilisant l'**exercice 1 de la feuille 1**, montrer par récurrence qu'un p-groupe est toujours résoluble.
2. Soient $p < q$ deux nombres premiers distincts. Montrer qu'un groupe de cardinal pq^α est toujours résoluble.
   Considérer un q-Sylow.
3. Soit G un groupe d'ordre 12. Montrer que G est résoluble.
   En supposant les 3-Sylow non distingués, compter le nombre d'éléments d'ordre 3.
4. Soient p, q deux nombres premiers distincts. Montrer qu'un groupe de cardinal p^2q est toujours résoluble.

Exercice 15 (Résoluble et distingué)

Soit G un groupe.

1. Montrer que si R et S sont deux sous-groupes résolubles de G avec R distingué alors RS est un groupe résoluble.
2. En déduire que tout groupes fini possède un unique sous groupe $\mathcal{R}(G)$ distingué, résoluble et maximal pour ces propriétés.
3. Montrez que G/$\mathcal{R}(G)$ n'a pas de sous-groupe distingué et résoluble.

Exercice 16 (Action primitive d'un groupe résoluble)

Soient G un groupe fini résoluble agissant de manière fidèle et primitive sur X. On dit que $H \subset G$ est un distingué minimal si les deux seuls sous-groupes distingués dans G et contenus dans H sont $\{1\}$ et H. Soit H un sous-groupe distingué de G.

- Montrez que $D(H)$ est distingué dans G.

On suppose maintenant que H est un distingué minimal.

- Montrez que H est commutatif.
- Soit p un diviseur premier de $\#H$ et $S \subset H$ un p-Sylow, montrez que $S = H$.
- En utilisant l'**exercice 10 de la feuille 1** montrez que $\#X = p^n$.

Exercice 17 (Sous groupes maximaux d'un groupe résoluble)

En utilisant les **exercices 5 et 16 de la feuille 1**, montrer que les sous-groupes maximaux d'un groupe résoluble fini sont d'indice une puissance d'un nombre premier.

Exercice 18 (Théorème de Feit-Thompson)

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Tout groupe d'ordre impair est résoluble.

2. Tout groupe fini simple non-abélien est d'ordre pair.

Le théorème de Feit-Thompson (1962) montre qu'elles sont vraies.

Simplicité

Exercice 19

Donner les cardinaux des classes de conjugaison dans $\mathfrak{A}_5$ et montrer que $\mathfrak{A}_5$ est simple.

Exercice 20 (Groupes simples abéliens)

Démontrer qu'un groupe abélien est simple si et seulement s'il est cyclique d'ordre premier.

Exercice 21

Soit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ non premier et p un diviseur premier de n. Montrer que si le seul diviseur de n congru à 1 modulo p est 1 alors il n'existe pas de groupe simple d'ordre n.

Exercice 22 (Lemme de Goursat)

Soient G_1 et G_2 deux groupes, on notera pr_1 (resp. pr_2) la projection de $G_1 \times G_2$ sur G_1 (resp. G_2).

1. Montrer que $\varphi : G_1 \to G_2$ est un morphisme de groupe si et seulement si son graphe $F \subset G_1 \times G_2$ est un sous-groupe

2. Montrer que si $F < G_1 \times G_2$ vérifie $pr_1|_F : F \to G_1$ est un isomorphisme alors F est le graphe d'un morphisme $\varphi : G_1 \to G_2$ de noyau K tel que $K \times 1_{G_2} = pr_2^{-1}(1_{G_2})$.

3. (Goursat) Soit $H < G_1 \times G_2$ tel que $pr_1(H) = G_1$ et $pr_2(H) = G_2$. Montrer qu'il existe $N_1 \lhd G_1$, $N_2 \lhd G_2$ tels que $\pi(H) \subset G_1/N_1 \times G_2/N_2$ soit le graphe d'un isomorphisme (où $\pi : G_1 \times G_2 \to G_1/N_1 \times G_2/N_2$ est le quotient par $N_1 \times N_2$).

4. Soient G_1 et G_2 deux groupes simples non abélien. Donner les sous groupes distingués de $G_1 \times G_2$.

5. Soient $G_1, \ldots, G_n$ des groupes simples non abéliens et $N \lhd \prod_{i=1}^n G_i$. Montrer par récurrence sur n qu'il existe $I \subset \{1, \ldots n\}$ tel que $N = \prod_{i \in I} G_i$.

Groupes symétriques et alternés

Exercice 23 ($\mathfrak{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6)

1. Soit H un sous-groupe d'ordre 6 de $\mathfrak{A}_4$. Montrer que pour tout $g \in \mathfrak{A}_4$, on a $g^2 \in H$.
2. En déduire que H contient tous les 3-cycles.
3. Conclure (éventuellement de deux manières...).
   La réciproque au théorème de Lagrange est donc fausse. Il s'agit du plus petit contre-exemple.

Exercice 24 (Sous-groupes d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$)

1. Soit $f : \mathfrak{S}_n \to \{\pm 1\}$ un homomorphisme de groupes. Démontrer que les transpositions ont toutes la même image. En déduire que f est soit constante soit la signature.
2. Soit G d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$. Démontrer que G est distingué puis que $G = \mathfrak{A}_n$.
3. En utilisant l'**exercice 8 de la feuille 1**, montrer que si G est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ agissant $(n-2)$-transitivement sur $\{1, \dots n\}$ alors G est $\mathfrak{A}_n$ ou $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 25 (Sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$)

Le but de l'exercice est de déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ (pour $n \geqslant 5$).

1. Soit H un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $H \cap \mathfrak{A}_n$ est un sous-groupe distingué de $\mathfrak{A}_n$. En déduire que H contient $\mathfrak{A}_n$ ou que $H \cap \mathfrak{A}_n = \{\mathrm{Id}\}$.
2. On suppose que $H \cap \mathfrak{A}_n = \{\mathrm{Id}\}$. Montrer que la restriction à H du morphisme signature est injective. Montrer que dans ce cas que tous les éléments de H sont dans le centre de $\mathfrak{S}_n$ et en déduire que $H = \{\mathrm{Id}\}$.
3. On suppose que H contient $\mathfrak{A}_n$. Montrer alors que $H = \mathfrak{S}_n$ ou $H = \mathfrak{A}_n$ suivant l'indice de H dans $\mathfrak{S}_n$.
4. Conclure : si $n \geqslant 5$, les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{\mathrm{Id}\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$..

Exercice 26 (Sous-groupes d'indice n)

En utilisant les **exercices 5 et 25 de la feuille 1**, montrer que pour $n \geqslant 5$, un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice n est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Pour n = 3 et n=4, verifiez qu'un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ d'indice n est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

Exercice 27

On note $\mathfrak{S}_\infty$ le groupes des bijections de $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ dans $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ de support fini.

1. Montrer que la signature définit un morphisme de groupe $\mathfrak{S}_\infty \to \{+1, -1\}$
2. On note $\mathfrak{A}_\infty$ le noyau de ce morphisme. Montrer que ce groupe est engendré par les 3-cycles et que tous les 3 cycles sont conjugués.
3. Montrer que $\mathfrak{A}_\infty$ est simple.
4. *Quid* du groupe des bijections de $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ dans $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$?

Exercice 28

Soit $n > 4$. On considère l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{P}_2(\{1, \dots n\})$ donnée par $\sigma(\{i, j\}) = \{\sigma(i), \sigma(j)\}$.

1. Montrer que cette action est transitive.
2. Montrer que cette action n'est pas 2-transitive.

On note $x = \{1, 2\} \in \mathcal{P}_2(\{1, \dots n\})$.

3. Montrez que $\mathrm{Stab}(x) = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{n-2}$.
4. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n \setminus \mathrm{Stab}(x)$. Montrez que
   - il existe $i \notin x$ tel que $\sigma(i) \notin x$
   - il existe $j \notin x$ tel que $\sigma(j) \in x$
   - $\sigma \circ (i, j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j))$
5. Montrer que le groupe engendré par $\mathrm{Stab}(x)$ et σ contient toutes les transpositions.
6. En déduire que l'action est primitive.